

### Nesouvislý doplněk ndoplnek [1 b.]

Ukažte, že doplněk grafu  $G = (V, E)$  je nesouvislý právě tehdy když  $G$  obsahuje úplný bipartitní graf jako podgraf na všech vrcholech (tzn. obsahuje podgraf  $H = (V, E')$  t.ž.  $H$  je isomorfní  $K_{n,m}$  pro nějaké  $n, m \in \mathbb{N}$ .)

**Definice 1.** Necht' je  $G = (V, E)$  graf a  $V' \subseteq V$ . Řekneme, že  $V'$  je *nezávislá množina*, pokud  $\forall u, v \in V' : uv \notin E$ , tedy mezi žádnými dvěma vrcholy  $V'$  nevede hrana.

### Nezávislá množina a maximální stupeň nezdeg [2 b.]

Necht'  $\alpha(G)$  značí velikost největší nezávislé množiny v grafu  $G$  a  $\Delta(G)$  jeho maximální stupeň. Dokažte

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$$

### Nezávislá množina a vrcholové pokrytí isvc [2 b.]

Dokažte, že pro každý graf  $G$  platí, že  $U \subseteq V(G)$  je nezávislá množina právě tehdy, když  $V(G) \setminus U$  (doplněk  $U$ ) je vrcholové pokrytí. Množina  $C \subseteq V(G)$  je vrcholové pokrytí grafu  $G$  pokud pro každou hranu  $\{u, v\} \in E(G)$  platí, že  $u \in C$  nebo  $v \in C$ .

### Souvislost a trhání vrcholů trh [2 b.]

Dokažte, že každý souvislý graf  $G$  na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy  $u$  a  $v$  takové, že všechny tři grafy  $G \setminus \{u\}$ ,  $G \setminus \{v\}$  a  $G \setminus \{u, v\}$  jsou souvislé.

### Kostry a hrana kostryhrana [2 b.]

Necht'  $T$  a  $\bar{T}$  jsou dvě různé kostry grafu  $G$ . Dokažte, že potom pro každou  $e \in T \setminus \bar{T}$  existuje  $\bar{e} \in \bar{T} \setminus T$  taková, že  $T - e + \bar{e}$  je také kostra.