

Bipartitní grafy

Ukažte, že graf je bipartitní právě tehdy, neobsahuje-li kružnici liché délky.

Stromy

Lesní formule

Ukažte, že platí: Graf s k komponentami souvislosti je les právě tehdy, když platí $|E| = |V| - k$.

Alespoň dva listy

Dokažte, že každý strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje alespoň dva listy.

Košaté stromy

Dokažte, že obsahuje-li strom vrchol stupně k , pak v něm je alespoň k listů

Kostra

Definujme kostru grafu jako podgraf, který obsahuje všechny vrcholy a je to strom. Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.

Pořadí vrcholů

Ukažte, že pro každý strom s n vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \dots, v_n\}$ takové, že v_i má právě jednoho souseda v množině $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$, pro každé $i = 1, \dots, n - 1$.

Skore stromu

Mějme posloupnost přirozených čísel $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ t.ž. $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ a $d_i \geq 1$ pro každé i . Dokažte, že existuje strom takový, že (d_1, \dots, d_n) je jeho skore, tzn. d_i je stupeň vrcholu v_i .

Nezávislá ve stromu

Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)