

### Inverze permutace `pinv` [0,5+1 b.]

Bud'  $\pi$  nějaká permutace množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Řekneme, že dvojice  $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$  je *inverze*  $\pi$ , pokud  $i < j$  a zároveň  $\pi(i) > \pi(j)$ .

1. Určete počet inverzí permutace  $\pi = (2\ 3\ 9\ 1\ 4\ 5\ 7\ 6\ 8)$ . (To znamená  $\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi(3) = 9, \dots$ )
2. Dokažte, že množina  $I(\pi)$  všech inverzí, chápaná jako relace, je transitivní.

### O šatnářce `satna` [ $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$ b.]

Nechť  $\check{s}(n)$  označuje, stejně jako na přednášce, počet permutací na množině  $\{1, \dots, n\}$  bez pevného bodu.

1. Vyjádřete počet permutací na množině  $\{1, \dots, n\}$  s právě jedním pevným bodem. Můžete k tomu použít funkci  $\check{s}$  (a je to vřele doporučeno).
2. Dokažte vztah

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \check{s}(n-k) = n!.$$

### Skoro úplné grafy `skup` [1,5 b.]

Dokažte, že pro každé  $n$  jsou všechny  $(n-2)$ -regulární grafy na  $n$  vrcholech navzájem isomorfní. (Graf je  $k$ -regulární právě tehdy, když každý vrchol má stupeň  $k$ .)

### Kružnice v $K_{n,n}$ `kruzKnn` [2 b.]

Spočítejte počet různých kružnic v grafu  $K_{n,n}$

### Kružnice $\delta$ `kruzdelta` [2 b.]

Označme si nejmenší stupeň v grafu jako  $\delta$ . Dokažte, že pro všechny hodnoty  $\delta \geq 2$ , potom v grafu existuje kružnice délky alespoň  $\delta + 1$ .