5. sada DÚ

Definice 1. Graf G je souvislý pokud pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí, že z u existuje cesta do v.

Doplněk nesouvislého `doplnek` [1,5 b.]

Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

d-dimenzionální krychle `ddim` [1,5 – 4 b.]

Buď $d \in \mathbb{N}$ a $V = \{0,1\}^d$, tedy V je množina 0/1 vektorů délky d. Grafu na V, ve kterém spolu dva vektory sousedí právě tehdy, když se liší v právě jedné souřadnici, se říká *d-dimenzionální krychle*. Jaký je počet vrcholů, počet hran, průměrný stupeň a délka nejkratší kružnice?

Jakou nejdelší indukovanou cestu umíte najít? Umíte alespoň $\frac{3}{2}d$? A co $2^{0.001d}$?(Přesná odpověď je velmi těžká, takže prostě zkuste nejlepší, jakou najdete.)

Nejdelší cesty `nejdelsi` [1,5 b.]

Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.

Párty `party` [1 b.]

Pan a paní Novákovi byli na exkluzivní party, kde kromě nich byly jen 3 další páry. Někteří lidé se navzájem pozdravili potřesením rukou, samozřejmě nezdravili svého partnera, a nikdo s nikým se nezdravil dvakrát. Později se pan Novák každého (včetně své ženy) zeptal, s kolika lidmi si potřásli rukou. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika lidmi si potřásla rukou paní Nováková?

Umíte to zobecnit na $n \geq 2$ párů na party?

Souvislost a trhání vrcholů `trh` [2 b.]

Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.

Stupeň alespoň d `degd` [1,5 b.]

Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d, obsahuje cestu na $d + 1$ vrcholech jako podgraf.

Vlastnosti isomorfismu `isomorf` [$5 \times 0,4$ b.]

Které z následujících výroků o isomorfismu jsou správné? Svá trvzení zdůvodněte.

1. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když pro každou bijekci $f : V(G) \to V(H)$ platí, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
2. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : E(G) \to E(H)$.
3. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že pro každý vrchol $v \in V(G)$ platí:
$$\deg_G(v) = \deg_H(f(v))$$
4. Grafy G a H jsou isomorfní, právě když existuje zobrazení $f : V(G) \to V(H)$ takové, že pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ platí následující ekvivalence:
$$\{u, v\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H).$$
5. Každý graf s n vrcholy je isomorfní nějakému grafu na množině vrcholů $\{1, \ldots, n\}$.