

Zobrazení

Definice 1 (Složení zobrazení). Mějme zobrazení $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$. Pak jejich *složení* je zobrazení $g \circ f$ definované jako $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$ pro každé $x \in X$.

Pozor: pořadí je opačné než ve značení u relací, tedy *druhá* funkce ve skládání se píše *jako první*.

Skládání zobrazení 3 sklad3 [4 × 0,3 b.]

Rozhodněte a dokažte, zda pro zobrazení f a g typu $M \rightarrow M$ platí následující 4 tvrzení. Pokud ano, dokažte, pokud ne, ukažte protipříklad.

- když $f \circ g$ je prosté potom **a)** f je prosté **b)** g je prosté
- když $f \circ g$ je na potom **c)** f je na **d)** g je na

Bijekce \mathbb{N} a \mathbb{Q} bijnq [1,5 b.]

Najděte bijekci mezi \mathbb{N} a \mathbb{Q} .

Identita identita [1 b.]

Rozhodněte a dokažte, zda pro relaci na množině M pravda, že $f \circ f = f$ implikuje, že f je tzv. *identita* Id_M , což je funkce definovaná jako $Id_M(x) = x$ pro každé $x \in M$.

Kombinatorika

Konference konference [1,5 b.]

Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtveřicí 2 krát
- s celou pětici právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

(Pozor: pokud obědval se dvěma známými, započítá se to i do obědů s nimi jako s jednotlivci.)

Eratosthenovo síto za milion erat3 [1,5 b.]

Kolik čísel zbude z množiny $\{1, 2, \dots, 1000000\}$ po vyškrtání všech násobků čísel 77, 91, 143 a 154? (Můžete používat jakékoliv pomůcky, ale řešení musíte řádně zdůvodnit.)