# 3. sada DÚ



**Definice 1** (Lineární uspořádání)**.** Řekneme, že uspořádání $\preceq$ na množině $X$ je *lineární*, pokud pro každé $a, b \in X$ platí buď $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$.

## Dlouhý a ne-příliš zajímavý `usp` [$4 \times 0.75$ b.]

Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární? Určete jejich nejmenší/největší/minimální/maximální prvky a nakreslete Hasseův diagram:

1. $\leq_A$: $(a, b) \leq_A (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$
2. $\leq_B$: $(a, b) \leq_B (c, d)$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$
3. $\leq_C$: $(a, b) \leq_C (c, d)$ právě když $a < c$ nebo ($a = c$ a zároveň $b \leq d$)
4. $\leq_D$: $(a, b) \leq_D (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$

## Diagonala `diag` [1 b.]

Ukažte, že relace $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$ na množině $X$ (takzvaná diagonála) je jediná relace na $X$, která je ekvivalencí a zároveň uspořádáním.

## Počet relací `poctyrel` [$0.3 + 0.5 + 0.5 + 0.7$ b.]

Určete počet relací na $n$ prvcích:

1. Všech,
2. reflexivních,
3. symetrických,
4. antisymetrických.

*Nápověda:* vzpomeňte si na znázornění relace maticí.

## Kombinační čísla III `komb3` [$6 \times 0,5$ b.]

Dokažte následující vztahy početně i kombinatoricky:

1. $\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.
2. $\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

## Kombinační čísla IV. `komb4` [$0.6 + 0.9$ b.]

Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

1. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$