Kvíz

1. Mějme konečné množiny X, Y, Z. Označme $x = |X|$, $y = |Y|$ a $z = |Z|$. Kolik prvků má kartézský součin $X \times Y \times Z$?
   (a) xyz
   (b) 2^{x+y+z}
   (c) $\max(x, y, z)$
2. Mějme relaci R mezi X a Y a relaci S mezi Y a Z. Jak definujeme složení $R \circ S$?
   (a) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \vee (y, z) \in S)\}$
   (b) $\{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$
3. Mějme ekvivalenci R na množině X. Nechť $R[x]$ označuje třídu ekvivalence určenou prvkem x. Které z následujících tvrzení **není** obecně pravdivé?
   (a) $(\forall x \in X) R[x] \neq \emptyset$
   (b) $\bigcup_{x \in X} R[x] = X$
   (c) $(\forall x, y \in X) |R[x]| = |R[y]|$
   (d) $(\forall x, y \in X)(R[x] \cap R[y] \neq \emptyset) \Rightarrow R[x] = R[y]$
4. Mějme libovolnou množinu X. Relace $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$ je:
   (a) Uspořádáním i ekvivalencí zároveň.
   (b) Pouze uspořádáním.
   (c) Pouze ekvivalencí.
   (d) Ani jedním.
5. Mějme uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ s nejmenším prkvem. Nechť $Y \subseteq X$ je neprázdná. Má uspořádaná množina $(Y, \preceq_Y)$, kde $\preceq_Y = \preceq \cap (Y \times Y)$ také nejmenší prvek?
   (a) Vždy ano.
   (b) Nikdy ne.
   (c) Může, ale nemusí mít.

Relace

Ekvivalenční třídy

Je následující relace ekvivalence? Pokud ano, jaké jsou její ekvivalenční třídy? Pro konečnou množinu X definujeme relaci $\sim$ nad 2^X tak, že pro $A, B \in 2^X$ platí $A \sim B$ pokud existuje bijekce mezi A a B.

Relace dělitelnosti

Uvažujme relaci $x \mid y$ (x je dělitelem y) na množině $\{1, \ldots, n\}$.

1. Dokažte, že je to uspořádání. Je lineární?
2. Nakreslete Hasseův diagram (třeba pro $n = 13$).
3. Jak vypadají nejmenší, největší, minimální a maximální prvky?
4. Jak se odpovědi na předchozí otázky změní odebráním prvku 1?

Uspořádání na objednávku

Sestrojte uspořádání s následujícími vlastnostmi:

1. žádný minimální ani maximální prvek
2. žádný největší, ale aspoň 1 maximální
3. žádný největší, ale právě 1 maximální
4. nekonečně mnoho minimálních prvků a 1 maximální

Kombinatorické počítání

Definice 1 (Cyklus permutace)**.** Pro množinu X a na ní definovanou permutaci π řekneme, že k-tice $(a_1, \ldots, a_k)$, t.ž. $a_1, \ldots, a_k \in X$, je *cyklem* π pokud platí, že $\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \ldots, \pi(a_k) = a_1$.

Každou permutaci lze rozložit do jejích cyklů (kde i smyčka $\pi(a) = a$ je cyklus, konkrétně délky 1).

Permutace s právě jedním cyklem

Kolik existuje premutací množiny velikosti n, které mají právě jeden cyklus?

Cesty v mřížce

Kolika způsoby lze projít čtvercovou mřížku obdélníkového tvaru z levého dolního rohu do pravého horního rohu, pokud má m čtverečků ve vodorovném směru, n čtverečků ve svislém směru a můžeme se pohybovat jen směrem vpravo a nahoru po hranách mřížky?

Kombinační čísla II

Dokažte následující vztahy početně či kombinatoricky (doporučuji to druhé):

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Kombinační čísla IV

Zjistěte, čemu se výrazy rovnají; nejlépe to pak vysvětlete kombinatoricky, nikoliv výpočtem :)

1. $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \binom{n}{k}$