

Mocnina relace R_n [1+1 b.]

Pro relaci R na množině X definujeme indukci relací $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

Uzavřenost reflexivity reflex [4 × 0,5 b.]

Nechť jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

1. $R \cup S$
2. $R \cap S$
3. $R \setminus S$
4. R^{-1}

Relace R^{-1} je inverzní relace k R a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Transitivita tranzit [4 × 0,5 b.]

Nechť R a S jsou tranzitivní relace na množině X . Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \Delta S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- R^{-1}

Ekvivalence III ekv [7 × 0,3 b.]

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:

- (a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
- (b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (x, y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
- (c) $X = \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
- (d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), ((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$