# 2. sada DÚ



## Mocnina relace `Rn` [1+1 b.]

Pro relaci $R$ na množině $X$ definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li $X$ konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny $R^n$ jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

## Uzavřenost reflexivity `reflex` [$4 \times 0,5$ b.]

Nechť jsou $R$ a $S$ reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

1. $R \cup S$
2. $R \cap S$
3. $R \setminus S$
4. $R^{-1}$

Relace $R^{-1}$ je inverzní relace k $R$ a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

## Transitivita `tranzit` [$7 \times 0,3$ b.]

Nechť $R$ a $S$ jsou tranzitivní relace na množině $X$. Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \triangle S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- $R^{-1}$

## Ekvivalence III `ekv` [$4 \times 0,5$ b.]

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x$ dělí $y$ a zároveň $y$ dělí $x$
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že $z$ dělí $x$ i $y$
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$