Matematická indukce

Vážené mocniny dvojky

Uhodněte nebo odvoďte vzoreček pro

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i$$

a dokažte jeho správnost indukcí.

Josephova úloha[1]

V následujícím pokusu rozmístíme $n \geq 1$ lidí očíslovaných $1, \ldots, n$ na kružnici (vzestupně ve směru hodinových ručiček). Postupujeme po směru hodinových ručiček od prvního člověka a vyřazujeme každého druhého člověka do doby, než nám zbude jediný. Číslo posledního zbylého člověka označíme jako $J(n)$.

Ukažme si to na příkladu: Pro $n = 10$ postupně odstraníme $2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9$, až nám zbude 5. Tedy $J(10) = 5$.

Zapišme n jako $n = 2^m + \ell$, kde $0 \leq \ell < 2^m$. Dokažte

$$J(2^m + \ell) = 2\ell + 1.$$

Nápověda: Buď se pokuste vyjádřit $J(n + 1)$ pomocí $J(n)$, nebo (a to mi připadá jednodušší) dokažte následující dva vztahy

$$J(2n) = 2J(n) + 1,$$
$$J(2n + 1) = 2J(n) - 1.$$

Relace

Skládání relací

Jak vypadá relace $R \circ R$, označuje-li R:

1. relaci rovnosti na množině $\mathbb{N}$,
2. relaci $\leq$ na $\mathbb{N}$,
3. relaci $<$ na $\mathbb{N}$,
4. relaci $<$ na $\mathbb{R}$.

Falešné skládání

Nechť R a S jsou relace na množině X a platí, že

$$\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xSz.$$

Nalezněte protipříklad na tvrzení: R je tranzitivní právě tehdy když $S \subseteq R$.

Mocnina relace

Pro relaci R na množině X definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.

1. Dokažte, že je-li X konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
2. Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny R^n jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

[1] Podrobnosti o úloze a to, jak se váže k Flaviu Josephovi, můžete najít v knize: *Graham, Knuth, Patashnik: Concrete Mathematics.*

Rodinné vztahy

Uvažme univerzum všech lidí a definujme na něm relace O, M:

$$xOy \equiv x \text{ je otcem } y$$
$$xMy \equiv x \text{ je matkou } y$$
$$xBy \equiv x \text{ je bratrem } y$$

Jak pomocí operací nad relacemi vyjádříme relace „x je rodičem y“, „x je dítětem y“ a „x je strýcem y“?

Uzavřenost reflexivity

Nechť jsou R a S reflexivní relace na téže množině. Určete, které z následujících relací jsou také reflexivní – zdůvodněte, proč jsou reflexivní nebo nalezněte protipříklad.

1. $R \cup S$
2. $R \cap S$
3. $R \setminus S$
4. R^{-1}

Relace R^{-1} je inverzní relace k R a $(y, x) \in R^{-1}$ právě tehdy, když $(x, y) \in R$.

Ekvivalence III

Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence a pokud jsou určete jejich třídy ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$