

ÚVOD

Principy cvičení.

- **Vy** se chcete něco naučit.
- **Já** se vám k tomu snažím vytvářet prostor.
- Proto je nejdůležitější, co potřebujete **vy**:
 - ... pochopit něco z přednášky
 - ... pochopit příklad z minulého cvičení
 - ... pochopit domácí úkol atd.
- **Nebojte se** klást otázky
- Pár obecných **típů**:
 - Když si nevíte rady, zkuste si hrát s příklady. (Neumíte dokázat tvrzení pro obecná n a k ? Vyzkoušejte si, co vlastně říká pro nějaké malé hodnoty.)
 - Zkuste svůj “zásek” vysvětlit part’ákům Nejdřív jim vysvětlete, čemu **rozumíte** a čemu **nerozumíte** (samotným vám to pomůže uchopit jádro problému). I pokud si part’áci taky neví s úlohou rady, můžou vám pomoci s tím, kde jste se zasekli vy.
 - Když si pořád nevíte rady, přivolejte mě, snad budu umět pomoci :)
 - Řešení příkladů budete prezentovat vy – vaše myšlení si je bližší!

Technické detaily.

- Pište mi na koutecky+dm@iuuk.mff.cuni.cz.
- Web cvičení je na http://research.koutecky.name/db/teaching:dm1920_cviceni
- Na zápočet potřebujete nasbírat 100 bodů, ty můžete získat za:
 - **řešení** domácích úkolů,
 - **opravování** domácích úkolů spolužákům,
 - malé **písemky** na začátku cvičení
 - (*Naopak nevyžadují **prezenci** – pokud se toho více naučíte jinde/jindy/jinak, klidně na cvičení nechod’te. Pokud chcete sbírat body z písemky ale jinak na cvičení nebýt, neurazím se, když hned po písemce odejdete.*)
- Úkoly přijímám **primárně** elektronicky a to jako prostý text (tzn. přímo v mailu), jako PDF (ideálně vyrobené (La)TeXem, ale to není povinné, jen silně doporučené), jako odkaz na hackmd.io s vypracovanou úlohou, nebo jako scan nebo čitelnou fotku (doporučuji např. appku Office Lens). **Nechci** formáty .doc, .docx, .odt atp. Pokud mi pošlete řešení úkolu v jiném než přijímaném formátu a já to zjistím až po termínu odevzdání úkolu, máte smůlu. **Papírově** přijímám řešení také, ale musí být čitelně napsané a hlavně se tím zbavujete šance dostat zpětnou vazbu dřív a třeba se stát korektorem.
- Pokud budete potřebovat **konzultaci**, zkuste se nejdřív zeptat spolužáků. Když vás bude víc, napište mi mail nebo za mnou přijd’te po cvičení, domluvíme se na konkrétním čase a místě.

MATEMATICKÉ HRÍČKY

Mravenci na tyči. V zájmu vědy jste na metrovou tyč rozmístili 25 mravenců. Na počátku všichni mravenci stojí na místě. Když tlesknete, každý mravenec se rozejde rychlostí 1 cm/s směrem k jednomu z konců tyče. Pokud dojde na konec tyče, spadne dolů a dál se pokusu neúčastní. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout, takže se oba otočí čelem vzad a pokračují v chůzi. Dokažte, že pro každou možnou volbu počáteční polohy a směru mravenců platí, že všichni mravenci do 100 sekund popadají.

Lámání čokolády 1. Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámát na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

Lámání čokolády – hra. Opět lámání čokolády, tentokrát pro dva hráče. Hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který je zrovna na tahu, si vybere jednu z částí čokolády a libovolně ji rozlomí, pouze je zakázáno odlamovat kousky 1×1 . Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Vymyslete vyhrávající strategii pro hráče, který začíná, víte-li, že alespoň jeden z rozměrů čokolády je na počátku sudý.

DŮKAZY SPOREM

Nekonečnost prvočísel. Dokažte, že počet prvočísel je nekonečný.

$\sqrt{2}$. Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální.

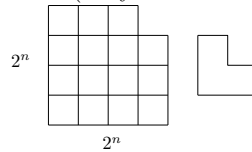
DŮKAZY INDUKCÍ

Identita 1. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

Přímky. Nakresleme n přímek v rovině tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že rovina je tím rozdělena na přesně $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ částí.

Vykousnutá šachovnice. Máme šachovnici $2^n \times 2^n$ ve které chybí jedno políčko, jako na obrázku. Dokažte, že ji můžeme vydláždít mnohoúhelníky ve tvaru L (taky viz obrázek).



Mince 3 a 5. Jsme v divné zemi, kde existují mince hodnoty 3 a 5. Dokažte, že každý obnos větší než 7 lze zaplatit pouze těmito mincemi.

Dělitelnost pěti. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku).

MATEMATICKÉ ZNAČENÍ

Čtení sum a produktů. Rozepište následující výrazy:

$$\sum_{i=0}^5 a_i^2 \quad \sum_{i=0}^5 (a_{i+1} - a_i) \quad \sum_{1 \leq i^2 \leq 10} a_i \quad \prod_{i=1}^5 \frac{a_i}{a_{i+1}}$$

Distributivita průniku a sjednocení. Zapište výraz

$$\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m A_{i,j}$$

jako sjednocení průníků.

Potenční množiny. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?