**DISKRÉTNÍ MATEMATIKA**
**1. série DÚ. Termín: 15:40 20. 10. 2015**

**Zobrazení složená sama na sebe.** Mějme zobrazení $f : X \to X$ na nějaké (konečné) množině $X$ splňující $f \circ f = f$. Příkladem takovéhoto tvrzení budiž indentita na $X$. Nalezněte další zobrazení splňující tento vztah. Charakterizujte všechna takováto zobrazení.
[1 bod]

**Počet relací.** Určete počet relací na $n$ prvcích:
(1) Všech,
(2) reflexivních,
(3) symetrických,
(4) antisymetrických.

[$4 \times 0.5$ bodů]

**Relace na $n$-tou.** Pro relaci $R$ na množině $X$ definujeme indukcí relaci $R^n : R^1 = R, R^{n+1} = R \circ R^n$.
(1) Dokažte, že je-li $X$ konečná množina, potom existují $r, s \in \mathbb{N}, r < s$ takové, že $R^r = R^s$.
(2) Nalezněte relaci na nekonečné množině takovou, že všechny $R^n$ jsou různé – tedy předchozí bod pro nekonečné množiny neplatí.

[$1 + 1$ bodů]

**Fibonacci.** O Fibonacciho číslech jste možná už slyšeli. Jsou definována následovně:
- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 3$

(Takže prvních několik hodnot je $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$)
Dokažte, že pro ně platí následnující rovnost.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

[1 bod]

email: koutecky@kam.mff.cuni.cz, url: http://research.koutecky.name/teaching/.