

## DISKRÉTNÍ MATEMATIKA

Cvičení 22. 10. 2013

**Konference.** Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtvericí 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

**Kuličky do přihrádek.** Mějme  $k$  kuliček, které chceme rozdělit do  $n$  jamek. Vyjádřete, kolika způsoby můžeme rozdělit kuličky do jamek pokud v každé jamce má být daný počet kuliček a kuličky jsou různobarevné/stejnobarevné.

	nanejvýš jedna kulička	libovolně kuliček	alespoň jedna kulička
různobarevné			
stejnobarevné			

**Hraní s kombinačním číslem.** Dokažte:

[a].

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

[b].

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

[c].

$$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

[d].

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

CATALAN

**Mřížka.** Přemýšlejme o tom, kolik je v mřížce  $n \times n$  možných cest z bodu  $(0, 0)$  do bodu  $(n, n)$  (z dolního levého do horního pravého rohu), které jdou jen doprava a nahoru. Označme jako  $C_n$  kolik z nich se nachází pod diagonálou (ale můžou se jí dotknout). Vypočtěte  $C_1, \dots, C_4$ .

**Uzávorkování.** Kolik různých uzávorkování má rozepsaný výraz  $\bigcup_{i=1}^n A_i$ ? Označte tento počet  $U_i$  a vypočtěte  $U_1, \dots, U_5$ .

**Triangulace.** Kolika způsoby lze rozdělit pravidelný  $n$ -úhelník na trojúhelníky? (T.j. nakreslit neprotínající se úhlopříčky?) Označte tento počet  $T_i$  a vypočtěte  $T_1, \dots, T_6$ .

**Vzoreček.** Pokuste se najít pro předchozí kvantify  $(C_i, U_i, T_i)$  rekurentní vzorečky.