DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
Cvičení 15. 10. 2014

Ekvivalence I. Nechť R je relace ekvivalence na množine X a $R[x]$ je množina všech prvků množiny X, které jsou s x v relaci. Dokažte:
(a) $x \in R[x]$
(b) $(x, y) \in R \Rightarrow R[x] = R[y]$
(c) $(x, y) \notin R \Rightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset$

Ekvivalence II. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Ekvivalence III. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Vlastnosti nerovností. Popište relaci $R \circ R$, označuje-li R
(a) relaci rovnosti „$=$" na množine $\mathbb{N}$
(b) relaci „$\leq$" na $\mathbb{N}$
(c) relaci „$<$" na $\mathbb{N}$
(d) relaci „$<$" na $\mathbb{R}$

Transitivita. Nechť R a S jsou tranzitivní relace na množině X. Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \triangle S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- R^{-1}

Počet reflexivních relací. Kolik je různých reflexivních relací na množině n prvků?

O dělitelnosti. Rozmyslete si že relace dělitelnosti na $\mathbb{N}$ je ČUM, nakreslete její Hasseho diagram pro $n = 10$ a nalezněte její největší/nejmenší/maximální/minimální prvek, či si rozmyslte, že neexistuje.

Jak vypadá supremum a infimum takové relace?

Definice 1 (Vnoření uspořádání)**.** Nechť $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Zobrazení $f\colon X \to Y$ nazýváme vnoření $(X, \leq)$ do $(Y, \preceq)$, jestliže platí:
(i) f je prosté
(ii) $f(x) \preceq f(y)$ pro každé $x \leq y$
(iii) jestliže $f(x) \preceq f(y)$, potom i $x \leq y$

Lexikografické uspořádání $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vnořeno do $\mathbb{Q}$.
(a) Popište nějaké vnoření množiny $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání podle velikosti.
(b) Popište vnoření $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do $(\mathbb{Q}, \leq)$.

email: `m@ef5.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/`.

Vnoření ještě jednou. Dokažte, že pro každou uspořádanou množinu $(X, \preceq)$ existuje vnoření do uspořádané množinu $(2^X, \subseteq)$

Dlouhý a ne-příliš zajímavý. Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární?
(a) $\leq_A$: $(a, b) \leq_A (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$
(b) $\leq_B$: $(a, b) \leq_B (c, d)$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$
(c) $\leq_C$: $(a, b) \leq_C (c, d)$ právě když $a < c$ nebo ($a = c$ a zároveň $b \leq d$)
(d) $\leq_D$: $(a, b) \leq_D (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$