

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
2. série DÚ. Termín: 15. 10. 2014

Džbány. [2 body]

Mějme k (alespoň 2) džbánů s vodou. V každém je celočíselné množství litrů vody a celkově je ve džbánech 2^n ($n \geq 2$) litrů vody. Libovolný džbán můžeme vzít a přelit vodu z něj do jiného džbánu, který obsahuje stejně nebo méně vody.

Dokažte, že bez ohledu na počáteční rozdělení vody (kolik vody je ve kterém džbánu) existuje posloupnost přelití taková, že na konci budou všechny džbány prázdné až na jeden, který bude obsahovat všechnu vodu.

Uzávorkování. [2 body]

Ukažte, že každá dvě uzávorkování výrazu $\bigcap_{i=1}^n X_i$ dávají stejný výsledek. (Napřed si pečlivě rozmyslete, jak si formálně zavést, co je uzávorkování.)

Fibonacci. [2 body]

O Fibonacciho číslech jste možná už slyšeli. Jsou definována následovně:

- $F_1 = 1$
- $F_2 = 1$
- $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ pro všechna $i \geq 3$

(Takže prvních několik hodnot je 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)

Dokažte, že pro ně platí následující rovnost.

$$\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$$