

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA

2. cvičení 8. 10. 2014

Potenční množiny. Nalezněte potenční množinu množiny $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Uzávorkování. Ukažte, že každá dvě uzávorkování výrazu $\bigcap_{i=1}^n X_i$ dávají stejný výsledek.

Mohutnosti. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Počet funkcí. Mějme množiny X velikosti n a Y velikosti m . Kolik existuje různých funkcí z X do Y ?

Potenční množiny zase ... Jaká je velikost potenční množiny M v závislosti na velikosti M samotné?

Funkce prosté a na. Najděte funkci $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která

- (a) je prostá a není na
- (b) je na a není prostá

Skládání funkcí. Funkce $f(g(x))$ je prostá. Musí být funkce f a/nebo g také prosté?

Ekvivalence I.. Nechť R je relace ekvivalence na množině X a $R[x]$ je množina všech prvků množiny X , které jsou s x v relaci. Dokažte:

- (a) $x \in R[x]$
- (b) $(x, y) \in R \Rightarrow R[x] = R[y]$
- (c) $(x, y) \notin R \Rightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset$

Ekvivalence II.. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Ekvivalence III.. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:

- (a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff p \text{ dělí } (x - y)$
- (b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (x, y) \in R \iff x \text{ dělí } y \text{ a zároveň } y \text{ dělí } x$
- (c) $X = \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}, \text{ že } z \text{ dělí } x \text{ i } y$
- (d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}), ((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Vlastnosti nerovností. Popište relaci $R \circ R$, označuje-li R

- (a) relaci rovnosti „=” na množině \mathbb{N}
- (b) relaci „ \leq ” na \mathbb{N}
- (c) relaci „ $<$ ” na \mathbb{N}
- (d) relaci „ $<$ ” na \mathbb{R}

Transitivita. Nechť R a S jsou tranzitivní relace na množině X . Budou následující relace také tranzitivní?

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \Delta S$ (operace XOR)
- $R \circ S$
- $R^{-1} \circ S^{-1}$
- R^{-1}

Počet reflexivních relací. Kolik je různých reflexivních relací na množině n prvků?