

Sekvence. Nakreslete, jak se vyvíjí AVL strom, když do něj postupně přidáváme čísla 10, 20, 15, 25, 30, 16, 18, 19. Jak následně vypadá odebrání čísla 30?

Hloubka. Vyberte nějakou reprezentaci AVL stromu. Jak nyní spočítat jeho hloubku? Jaké jsou výhody a nevýhody této reprezentace?

k -tý nejmenší. Jak upravit AVL strom, aby uměl rychle odpovídat na dotaz “jaký je k -tý nejmenší prvek”?

Minimum v intervalu. Mějme AVL strom použitý jako slovník, tzn. v každém vrcholu je klíč a nějaká celočíselná hodnota. Upravte strom tak, aby uměl rychle odpovídat na dotaz, jaká je nejmenší hodnota mezi klíči v intervalu $[a, b]$.

Datovka 1. Sestrojte datovou strukturu, která bude umět vykonávat následující operace s příslušnými složitostmi:

- $\text{Init}()$ – inicializuje strukturu – $\mathcal{O}(1)$.
- $\text{INSERT}(X)$ – vloží prvek X , pokud ve struktuře ještě není – $\mathcal{O}(\log n)$.
- $\text{DELETE}(X)$ – odstraní ze struktury X , pokud v ní je – $\mathcal{O}(\log n)$.
- $\text{GET_PLACE}(X)$ – vrátí číslo I označující jako kolikátý byl prvek X přidán do struktury – $\mathcal{O}(\log n)$.
- $\text{DELETE_IN_PLACE}(I)$ – odstraní ze struktury prvek, který byl v pořadí I -tý přidán – $\mathcal{O}(\log n)$.

Datovka 2. Elektikář si chce udržovat seznam klientů podle jejich identifikačních čísel (ID) a s údajem, zda se jedná o muže či ženu. Navrhněte datovku, která bude umět následující operace v $\mathcal{O}(\log n)$:

- $\text{INSERT}(K, C)$ – vloží nového klienta C s $\text{ID}=K$, označí ho jako ženu.
- $\text{UPDATE}(K)$ – klienta s $\text{ID}=K$ přeznačí na muže.
- $\text{FINDDIFF}(K)$ – spočítá rozdíl počtu mužů a žen mezi klienty s $\text{ID} \leq K$.

Vylepšování BVS. Uvažte obecný BVS uchovávající dvojice (klíč, hodnota) seříděné podle klíče. Se zachováním asymptotické složitosti všech operací naučte BVS následující operace:

- (1) Min, Max a průměr v daném intervalu klíčů [*v podstatě už jsme měli posledně*]
- (2) Předpokládejte, že hodnoty jsou matice A_1, \dots, A_m velikosti $n \times n$ a pro jakýkoliv interval klíčů a, b chcete umět rychle odpovídat, jaký je maticový součin $A_a \cdot A_{a+1} \cdots A_b$. (Pozor, tato operace není komutativní, tedy na rozdíl od min, max a průměru v předchozím bodu, zde na pořadí násobení záleží.)
- (3) Přičtení δ ke všem hodnotám v zadaném intervalu.

Posloupnost. Mějme dānu posloupnost n čísel a chceme najít nejdelší rostoucí podposloupnost (nemusí být souvislá) v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. (Tuto úlohu jsme již viděli a uměli jsme pro ni řešení hledáním cesty v DAGu, které běželo v $\mathcal{O}(n^2)$.)

Okénko. Na vstupu postupně přicházejí čísla. Kdykoliv přijde další, vypište medián a průměr z předchozích k čísel. Dosáhněte časové složitosti $\Theta(\log k)$ na jedno vypisání.