5. cvičení

Paralelní plánování. Stavíte dům (či zakládáte školu) a máte *závislostní graf*, tzn. vrcholy jsou úkoly a hrana z u do v (orientovaná) znamená "než se začne pracovat na v, musí být dokončeno u". Navíc u každého úkolu mám zadáno, jak dlouho trvá a mám neomezené pracovní prostředky. Chci spočítat, kdy (nejpozději?) mám každou věc začít dělat, abych projekt dokončil co nejdřív. Jak na to?

Kritické vrcholy. Mám graf jako v předchozí úloze a za *kritický* označím takový vrchol, který odpovídá úkolu, jehož zdržení má za následek zdržení celého projektu. Jak vypsat všechny kritické vrcholy?

Málo letů. Mějme mapu představující města (vrcholy) a silnice je spojující (orientované hrany). Každé město na mapě má také letiště, ze kterého létají lety do některých měst (jiný typ orientovaných hran). Benzín a půjčení auta je levné, ale lety jsou drahé a můžete si dovolit nanejvýš k letů. Je zadán startovací vrchol s. Lze prozkoumat celou mapu s použitím jen k letů?

Hodně cest. Zkonstruujte graf na n vrcholech s $2^{\Omega(n)}$ nejkratšími cestami.

Průjezd městem. Na mapě města mám u každé silnice délku času na průjezd a u každé křižovatky průměrnou dobu čekání. Jak najít nejrychlejší cestu (třeba mezi dvěma křižovatkami)?

Nejpravděpodobnější cesta. Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?

Nejlevnější z nejkratších. Silnice v mapě máme ohodnocené dvěma čísly: délkou a mýtem (poplatkem za projetí). Jak najít nejlevnější z nejkratších cest?

Dijkstra fail. Ukažte příklad grafu s celočíselně ohodnocenými hranami, na kterém Dijkstrův algoritmus běží exponenciálně dlouho.

Záporné hrany $+k$? Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo k?

Nejrychleji vlakem. V Tramtárii jezdí po železnici samé rychlíky, které nikde po cestě nestaví. V jízdním řádu je pro každý rychlík uvedeno počáteční a cílové nádraží, čas odjezdu a čas příjezdu. Nyní stojíme v čase t na nádraží a a chceme se co nejrychleji dostat na nádraží b. Navrhněte algoritmus, který najde takové spojení. Pokračujeme v předchozím cvičení: Mezi všemi nejrychlejšími spojeními chceme najít takové, v němž je nejméně přestupů.

Max-min tunel. Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?