

**Reprezentace.** Známe tři základní grafové reprezentace – seznam hran, seznam sousedů, matice. Rozepište pro ně složitosti následujících základních operací:

- přidat-hranu( $u, v$ )
- smazat-hranu( $u, v$ )
- sousedí( $u, v$ )
- stupeň( $v$ )
- seznam-sousedů( $u, v$ )

*bonus:* Co když je v reprezentaci “seznam sousedů” místo spojového seznamu použijeme slovník (implementovaný jako hash tabulka)? Pokud nevíte, co je slovník nebo hash tabulka, úlohu zatím přeskočte :)

**Boss.** V paměti máte matici sousednosti orientovaného grafu  $G$ . Najděte v tomto grafu šéfa a nebo řekněte, že tam žádný není. Šéf je vrchol, ze kterého vede hrana do všech ostatních vrcholů a do něj samotného nevede žádná hrana. Zvládnete to v čase  $\mathcal{O}(n)$ ?

**Mocniny matice sousednosti.** Je-li  $A$  matice sousednosti grafu, co popisuje matice  $A^2$ ? A co  $A^k$ ? (Mocniny matic definujeme takto:  $A^1 = A$ ,  $A^{k+1} = A^k A$ .)

Na základě svého pozorování vytvořte algoritmus, který pomocí  $\mathcal{O}(\log n)$  násobení matic spočítá *matici dosažitelnosti*. To je nula-jedničková matice  $A^*$ , v níž  $A^*_{i,j} = 1$  právě tehdy, když z  $i$  do  $j$  vede cesta.

**Nejkratší cyklus (zadaná hrana).** Jak co nejrychleji nalézt pro zadaný graf  $G$  a hranu  $e$  nejkratší cyklus obsahující  $e$ ?

**Otrhávání grafu.** Mějme souvislý neorientovaný graf. V jakém pořadí odtrhávat vrcholy, aby přitom graf zůstal souvislý?

**Porouchaný taxík.** Na Manhattanu se porouchal taxík, takže už umí jet jen rovně, nebo zatáčet doprava. (Manhattan je pro nás síť  $n \times n$ .) Jak se má taxík do servisu dostat, aby projel co nejméně paliva?

**Bílá paní.** V bludišti stojí bílá paní na pozici  $S$  a chtěla by se dostat na pozici  $C$ . Bludiště si představte jako čtvercovou síť, kde každé políčko je buď volné, anebo zeď. Bílá paní může zdmi procházet, ale průchod zdí jí trvá  $4 \times$  déle než průchod normálním políčkem. Naleznete pro ni co nejrychlejší cestu.

**Stráž.** Máme bludiště ve čtvercové síti o rozměrech  $N \times N$  se zdmi, hrdinou a pokladem. Chceme najít nejkratší cestu hrdiny k pokladu, aniž by potkal stráž (vyskytl se na stejném políčku jako ona). Stráž má zadanou trasu délky  $L$  jako posloupnost (sousedních) políček a po této trase chodí tam a zpět. (Dejte si pozor na analýzu složitosti – jak závisí na  $N$  a  $L$ ?)

**Ztracení roboti.** V bludišti jsou na dvou různých místech robotci, které ale ovládáme jediným ovladačem. Tento ovladač má čtyři šipky (sever/jih/východ/západ). Když robotek dostane příkaz, který nemůže provést (narazil by do zdi), tak ho ignoruje.

Jak najít posloupnost příkazů, která oba roboty vyvede z bludiště? (Jakmile je robot venku z bludiště, zastaví se a příkazy už neposlouchá.) Jak najít nejkratší takovou posloupnost?

**Hloupý robot.** Máme opět bludiště ve čtvercové síti se zdmi, kterými nelze procházet. Robot se umí pohybovat jen rovně a zatočí pouze, když “narazí” do okraje bludiště nebo do zdi (dostane se na políčko sousední se zdí a je otočen směrem ke zdi). Při nárazu se může otočit i o  $180^\circ$ . Najděte pro robota cestu ze startu do cíle s co nejméně zatočeními.

**Brtník.** V lese tvaru čtvercové sítě se nachází medvěd, brloh, překážky a několik brtí.<sup>1</sup> Medvěd si právě začal pochutnávat na medu, ale hned si toho všimly včely a začaly se na něj slétat ze všech brtí najednou. Chceme spočítat, jak dlouho ještě může medvěd mlsat, aby ho na cestě do brlohu nezastihly včely. V čase 0 je medvěd na zadaném místě a včely v brtích. Za každou další jednotku času se medvěd posune o jedno políčko a včely se také rozšíří o jedno políčko.

**Jednoznačnost.** Navrhněte algoritmus, který pro daný graf  $G$  a vrchol  $s$  vygeneruje 0-1 pole  $\text{jed}[1..n]$ , kde pro každý  $v \in V$  je  $\text{jed}[v]=1$ , pokud je nejkratší cesta z  $s$  do  $v$  jednoznačná, jinak je to 0.

<sup>1</sup>Brť je úl lesních včel v dutině stromu. Od toho medvěd brtník.

**Minotaur.** Hrdina Théseus se vypravil do hlubin labyrintu a snaží se najít poklad. Chodbami labyrintu se ovšem pohybuje hladový Mínotaurus a snaží se najít Thésea. Labyrint má tvar čtvercové sítě, jejíž každé políčko je buďto volné prostranství, anebo zeď. Známe mapu labyrintu a počáteční polohy Thésea, Mínotaura a pokladu. Théseus se v jednom tahu pohne na vybrané sousední políčko. Poté se vždy dvakrát pohne o políčko Mínotaurus: pokaždé se pokusí zmenšit o 1 rozdíl své a Théseovy  $x$ -ové souřadnice, pokud to nejde, pak  $y$ -ové, pokud nejde ani to, stojí. Poradte Théseovi, jak má dojít k pokladu a vyhnout se Mínotaurovi