

Reprezentace. Známe tři základní grafové reprezentace – seznam hran, seznam sousedů, matice. Rozepište pro ně složitosti následujících základních operací:

- přidat-hranu(u, v)
- smazat-hranu(u, v)
- sousedí(u, v)
- stupeň(v)
- seznam-sousedů(u, v)

bonus: Co když je v reprezentaci “seznam sousedů” místo spojového seznamu použijeme slovník (implementovaný jako hash tabulka)? Pokud nevíte, co je slovník nebo hash tabulka, úlohu zatím přeskočte :)

Boss. V paměti máte matici sousednosti orientovaného grafu G . Najděte v tomto grafu šéfa a nebo řekněte, že tam žádný není. Šéf je vrchol, ze kterého vede hrana do všech ostatních vrcholů a do něj samotného nevede žádná hrana. Zvládnete to v čase $\mathcal{O}(n)$?

Mocniny matice sousednosti. Je-li A matice sousednosti grafu, co popisuje matice A^2 ? A co A^k ? (Mocniny matic definujeme takto: $A^1 = A$, $A^{k+1} = A^k A$.)

Na základě svého pozorování vytvořte algoritmus, který pomocí $\mathcal{O}(\log n)$ násobení matic spočítá *matici dosažitelnosti*. To je nula-jedničková matice A^* , v níž $A_{i,j}^* = 1$ právě tehdy, když z i do j vede cesta.

Nejkratší cyklus (zadaná hrana). Jak co nejrychleji nalézt pro zadaný graf G a hranu e nejkratší cyklus obsahující e ?

Otrhávání grafu. Mějme souvislý neorientovaný graf. V jakém pořadí odtrhávat vrcholy, aby přitom graf zůstal souvislý?

Porouchaný taxík. Na Manhattanu se porouchal taxík, takže už umí jet jen rovně, nebo zatáčet doprava. (Manhattan je pro nás síť $n \times n$.) Jak se má taxík do servisu dostat, aby projel co nejméně paliva?

Bílá paní. V bludišti stojí bílá paní na pozici S a chtěla by se dostat na pozici C . Bludiště si představte jako čtvercovou síť, kde každé políčko je buď volné, anebo zed. Bílá paní může zdmi procházet, ale průchod zdí jí trvá $4 \times$ déle než průchod normálním políčkem. Naleznete pro ni co nejrychlejší cestu.

Stráž. Máme bludiště ve čtvercové síti o rozměrech $N \times N$ se zdmi, hrdinou a pokladem. Chceme najít nejkratší cestu hrdiny k pokladu, aniž by potkal stráž (vyskytl se na stejném políčku jako ona). Stráž má zadanou trasu délky L jako posloupnost (sousedních) políček a po této trase chodí tam a zpět. (Dejte si pozor na analýzu složitosti – jak závisí na N a L ?)

Ztracení roboti. V bludišti jsou na dvou různých místech robotci, které ale ovládáme jediným ovladačem. Tento ovladač má čtyři šipky (sever/jih/východ/západ). Když robotek dostane příkaz, který nemůže provést (narazil by do zdi), tak ho ignoruje.

Jak najít posloupnost příkazů, která oba roboty vyvede z bludiště? (Jakmile je robot venku z bludiště, zastaví se a příkazy už neposlouchá.) Jak najít nejkratší takovou posloupnost?

Hloupý robot. Máme opět bludiště ve čtvercové síti se zdmi, kterými nelze procházet. Robot se umí pohybovat jen rovně a zatočí pouze, když “narazí” do okraje bludiště nebo do zdi (dostane se na políčko sousední se zdí a je otočen směrem ke zdi). Při nárazu se může otočit i o 180° . Najděte pro robota cestu ze startu do cíle s co nejméně zatočeními.

Brtník. V lese tvaru čtvercové sítě se nachází medvěd, brloh, překážky a několik brtí.¹ Medvěd si právě začal pochutnávat na medu, ale hned si toho všimly včely a začaly se na něj slétat ze všech brtí najednou. Chceme spočítat, jak dlouho ještě může medvěd mlsat, aby ho na cestě do brlohu nezastihly včely. V čase 0 je medvěd na zadaném místě a včely v brtích. Za každou další jednotku času se medvěd posune o jedno políčko a včely se také rozšíří o jedno políčko.

Jednoznačnost. Navrhněte algoritmus, který pro daný graf G a vrchol s vygeneruje 0-1 pole $\text{jed}[1..n]$, kde pro každý $v \in V$ je $\text{jed}[v]=1$, pokud je nejkratší cesta z s do v jednoznačná, jinak je to 0.

¹Brť je úl lesních včel v dutině stromu. Od toho medvěd brtník.

Minotaur. Hrdina Théseus se vypravil do hlubin labyrintu a snaží se najít poklad. Chodbami labyrintu se ovšem pohybuje hladový Mínotaurus a snaží se najít Thésea. Labyrint má tvar čtvercové sítě, jejíž každé políčko je buďto volné prostranství, anebo zeď. Známe mapu labyrintu a počáteční polohy Thésea, Mínotaura a pokladu. Théseus se v jednom tahu pohne na vybrané sousední políčko. Poté se vždy dvakrát pohne o políčko Mínotaurus: pokaždé se pokusí zmenšit o 1 rozdíl své a Théseovy x -ové souřadnice, pokud to nejde, pak y -ové, pokud nejde ani to, stojí. Poradte Théseovi, jak má dojít k pokladu a vyhnout se Mínotaurovi