

NA ÚVOD

Průjezd městem. Na mapě města mám u každé silnice délku času na průjezd a u každé křižovatky průměrnou dobu čekání. Jak najít nejrychlejší cestu (třeba z mezi dvěma křižovatkami)?

Nejpravděpodobnější cesta. Počítačovou síť popíšeme orientovaným grafem, jehož vrcholy odpovídají routerům a hrany linkám mezi nimi. Pro každou linku známe pravděpodobnost toho, že bude funkční. Pravděpodobnost, že bude funkční nějaká cesta, je dána součinem pravděpodobností jejích hran. Jak pro zadané dva routery najít nejpravděpodobnější cestu mezi nimi?

Max-min tunel. Mějme mapu města ve tvaru orientovaného grafu. Každou hranu ohodnotíme podle toho, jaký nejvyšší kamion po dané ulici může projet. Po cestě tedy projede maximálně tak vysoký náklad, kolik je minimum z ohodnocení jejích hran. Jak pro zadané dva vrcholy najít cestu, po níž projede co nejvyšší náklad?

Nejlevnější z nejkratších. Silnice v mapě máme ohodnocené dvěma čísly: délkou a mýtem (poplatkem za projetí). Jak najít nejlevnější z nejkratších cest?

Směnárna. Směnárna obchoduje s n měnami (měna číslo 1 je koruna) a vyhlašuje matici kurzů K . Kurz K_{ij} říká, kolik za jednu jednotku i -té měny dostaneme jednotek j -té měny. Vymyslete algoritmus, který zjistí, zda existuje posloupnost směn, která začne s jednou korunou a skončí s více korunami.

DIJKSTRA

Dijkstra a krátké hrany. Necht' délky hran leží v množině $\{0, \dots, L\}$. Navrhněte datovou strukturu založenou na příhrádkách, s níž Dijkstrův algoritmus poběží v čase $(nL + m)$. Pokuste se vystačit s pamětí $(n + m + L)$.

Dijkstra fail. Ukažte příklad grafu s celočíselně ohodnocenými hranami, na kterém Dijkstrův algoritmus běží exponenciálně dlouho.

BELLMAN-FORD

Detekce záporného cyklu s v_0 . Upravte Bellmanův-Fordův algoritmus, aby uměl detekovat záporný cyklus dosažitelný z vrcholu v_0 . Uměli byste tento cyklus vypsat?

Obecný relaxační. Dokažte, že v grafu bez záporných cyklů se obecný relaxační algoritmus zastaví, ať už vrchol k uzavření vybíráme libovolně.

FLOYD-WARSHALL

Floyd-Warshall a kudy cesta vede? Jak z výsledku Floydova-Warshallova algoritmu zjistíme, kudy nejkratší cesta mezi nějakými dvěma vrcholy vede?

Floyd-Warshall a nejkratší kružnice. Upravte Floydův-Warshallův algoritmus, aby pro každý vrchol našel nejkratší kružnici, která jím prochází. Předpokládejte, že v grafu nejsou žádné záporné cykly.

DALŠÍ ÚLOHY

Záporné hrany $+k$? Lze se v algoritmech na hledání nejkratší cesty zbavit záporných hran tím, že ke všem ohodnocením hran přičteme nějaké velké číslo k ?

Nejrychleji vlakem. V Tramtárii jezdí po železnici samé rychlíky, které nikde po cestě nestaví. V jízdním řádu je pro každý rychlík uvedeno počáteční a cílové nádraží, čas odjezdu a čas příjezdu. Nyní stojíme v čase t na nádraží a a chceme se co nejrychleji dostat na nádraží b . Navrhněte algoritmus, který najde takové spojení.

Pokračujeme v předchozím cvičení: Mezi všemi nejrychlejšími spojeními chceme najít takové, v němž je nejméně přestupů.

Hrany na aspoň jedné nejkratší. Vymyslete algoritmus, který nalezne všechny hrany, jež leží na alespoň jedné nejkratší cestě.

Kritické hrany. Kritická hrana budíž taková, která leží na všech nejkratších cestách. Tedy ta, jejíž prodloužení by ovlivnilo vzdálenost. Navrhněte algoritmus, který najde všechny kritické hrany.

Lineární nerovnice. Sestrojte algoritmus pro řešení soustavy lineárních nerovnic tvaru $x_i - x_j \leq c_{ij}$, kde c_{ij} jsou reálné, ne nutně kladné konstanty.