

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

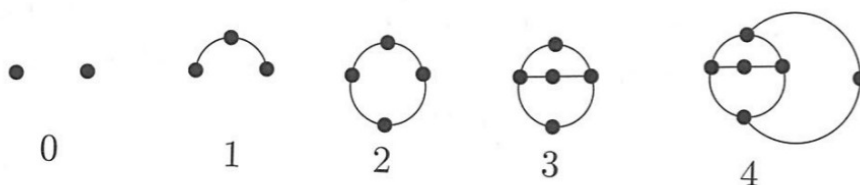
Domácí úkol 10

Příklad 1. *Maximální rovinný graf* je takový graf, že přidání jakékoliv další hrany (samozřejmě na téže množině vrcholů) způsobí, že graf již není rovinný. *Triangulace* je rovinný graf, v němž je každá stěna (včetně vnější) trojúhelník.

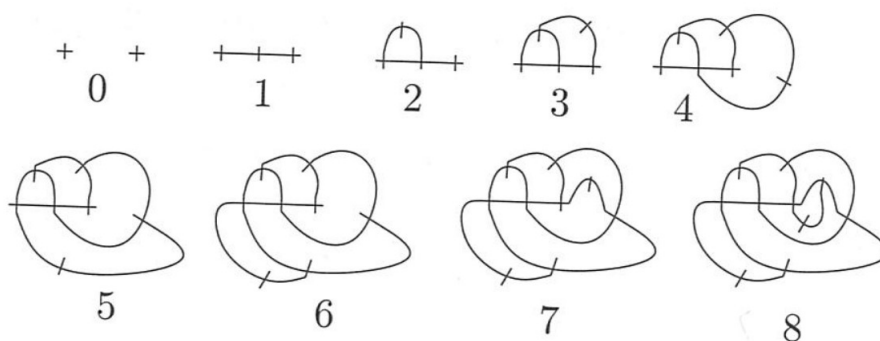
Dokažte, že každá triangulace je maximální rovinný graf a naopak každý maximální rovinný graf je triangulace. (Zmiňovali jsme si to v rychlosti na cvičení, zde to prosím dokažte důkladně.) [2 body]

Příklad 2. Mějme grafovou hru: na papíře je na začátku nakresleno n puntíků. Hráči se střídají v tazích a ten, který nemá tah, prohrává. V každém tahu hráč spojí dva puntíky obloukem, na který někde nakreslí další puntík. Důležité je, že puntík se smí použít pouze pokud je jeho stupeň nanejvýš 2 a také nám žádným tahem nesmí vzniknout nerovinné nakreslení.

Příklad hry:



- Dokažte že pro n počátečních puntíků má hra **nanejvýš** $3n - 1$ tahů. (nezáleží na strategii hráčů) [2 bod]
- Dokažte že pro n počátečních puntíků má hra **alespoň** $2n$ tahů. (nezáleží na strategii hráčů) [2 body]
- Naučme se modifikovanou hru: zde se místo puntíků kreslí křížky a nové oblouky se připojují k ramenům křížku, tedy každý vrchol může mít maximální stupeň 4. Na nový oblouk se křížek dokreslí pouze přeškrtnutím. Vše ostatní probíhá stejně jako v původní hře. Příklad je na následujícím obrázku:



Dokažte, že tato hra má přesně $5n - 2$ tahů, ať již hráči hrají jakkoli. [2 body]