DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Cvičení 5. 12.

Příklad 1. Charakterizujte všechny grafy které neobsahují jako podgraf:

a Cestu délky 1.
b Cestu délky 2.
c Cestu délky 3.
d Cestu délky 4.
e Sudou kruznici.
f Úplný bipartitní graf na všech vrcholech.

Například kdybych chtěl charakterizovat všechny grafy, které neosahují lichou kružnici jako podgraf, tak řeknu, že jsou to bipartitní grafy a jako důkaz použiju tvrzení z předminulých úkolů, kde upozorňuji, že bylo potřeba dokázat obě implikace.

Příklad 2. Dokažte užitečné tvrzení:

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

($\chi(G)$ je barevnost grafu G, $\alpha(G)$ velikost největší nezávislé množiny v G.)

Příklad 3. Dokažte, že pokud je $\chi(G) = k$, pak existuje takové seřazení vrcholů G, že hladový algoritmus najde obarvení k barvemi.

Příklad 4. Najděte bipartitní (tedy 2-obarvitelný) graf na n vrcholech a seřazení jeho vrcholů takové, že hladový algoritmus spotřebuje $n/2$ barev.

Příklad 5. Každý rovinný graf má nejvýše $3|V|-6$ hran. Jak charakterizovat všechny grafy, které mají *právě tolik* hran? (Takovým říkáme *maximální rovinné grafy*, protože přidání jakékoliv hrany už nutně znamená, že graf není rovinný.)

Příklad 6. Dokažte, že graf je rovinný, právě když libovolné jeho dělení je rovinný graf.

Příklad 7. Dokažte, že každý souvislý rovinný eulerovský graf lze nakreslit do roviny jediným uzavřeným tahem (tah se může „jen“ dotýkat ve vrcholech).

Příklad 8. Rozhodněte zda platí (a samozřejmě dokažte či nalezněte protipříklad) následujícího tvreni: Každý souvislý graf, který má všechny stupně sudé, neobsahuje most (tj. takovou hranu, jejímž odebráním z grafu, by se tento rozpadl na dvě komponenty souvislosti).

Příklad 9. Nechť je G rovinný graf bez smyček a násobných hran (*multihran*). Určete, jaké podmínky musí platit pro G, aby bylo zaručeno, že duál G (značíme $G*$) má následující vlastnosti:

[a]. G^* nemá žádné smyčky.

[b]. G^{**} je isomorfní s G.

[c]. G^* je bipartitní.

[d]. G^* je eulerovský (všechny stupně sudé).

Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

email: `martin@koutecky.name`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/`.