DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Domácí úkol 5

Příklad 1. Kolik je všech dělitelů čísla $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (p_i jsou prvočísla, α_i libovolná přirozená čísla)?
[1 bod]

Příklad 2. Dokažte, že z 50 libovolně zvolených navzájem různých prvočísel lze vždy vybrat 13 prvočísel tak, že rozdíl každých dvou je dělitelný pěti.
[1 bod]

Příklad 3. Na n-místném kolotoči jelo n dětí. Děti chtějí jet ještě jednou, ale žádné z nich nechce sedět za stejným dítětem jako při první jízdě. Kolika různými způsoby je můžete posadit na kolotoč tak, abyste vyhověli jejich přání? Výsledek nemusíte upravovat.
[2 body]

Příklad 4. Kolik existují permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které jsou involuce? Involuce je permutace π, která je sama svojí inverzí, tedy $\pi \circ \pi = id$. To jsou přesně takové permutace, že mají všechny cykly délky jedna nebo dva.
[2 body]

Příklad 5. Vzpomeňme, že š(n) označuje funkci šatnářky, tedy počet permutací $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ bez pevného bodu. Dokažte, že vždy platí:
š$(n) = (n-1)($š$(n-1) +$ š$(n-2))$
[1 bod]

Příklad 6. Na tabuli je za sebou napsáno 2013 (libovolných) přirozených čísel. Ukažte, že z nich lze vybrat několik (alespoň jedno) po sobě napsaných tak, že jejich součet je dělitelný 2013.
[1 bod]

email: martin@koutecky.name, url: http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/.