DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Domácí úkol 4

Příklad 1. Podívejme se v Pascalově trojúhelníku na jednotlivé položky řádku jako na „cifry" jakéhosi čísla P_n v desítkové soustavě – pro $n = 2$ to je 121, pro $n = 3$ to je 1331, pro $n = 4$ to je 161051. (Ten poslední případ je asi netriviální, získáme ho následovně: $\binom{5}{0} \cdot 10^0 + \binom{5}{1} \cdot 10^1 + \binom{5}{2} \cdot 10^2 + \binom{5}{3} \cdot 10^3 + \binom{5}{4} \cdot 10^4 + \binom{5}{5} \cdot 10^5$.)

Všimnuli jste si, že $P_2 = 121 = 11^2$, $P_3 = 1331 = 11^3$ a tak dále? Dokažte to obecně, tzn. $P_n = 11^n$.

[1 bod]

Příklad 2. Opět Pascalův trojúhelník. Podívejme se tentokrát na p-tý řádek pro p prvočíslo. Všimnuli jste si, že všechny prvky tohoto řádku (až na krajní jedničky) jsou násobky toho prvočísla? (Například pro $p = 3$ to je 3 3, pro $p = 7$ to je 7 21 35 35 21 7.) Dokažte, že to platí pro libovolné prvočíslo p.

[1 bod]

Příklad 3. (Neudělali jsme na cvičení) sečtěte:

[a].

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$$

[1 bod]

[b].

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

[1 bod]

Příklad 4. Spočítejte, kolik je trojic podmnožin A, B, C takových, že $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \{1..n\}$.

[1 bod]

Příklad 5. Chceme uspořádat pofidérní seznamovací akci, kde postupně měníme rozesazení lidí a chceme, aby se mezi sebou všichni dobře a rovnoměrně poznali.

Přesně řečeno, máme $n = sk$ lidí, kteří sedí u k stolů po s lidech, a chceme, aby se každá t-tice lidí potkala **právě** jednou.

[a]. Kolik různých rozesazení musíme vystřídat pro $s = 3$ a $t = 3$, než toto nastane? Jde to vůbec?

[1 bod]

[b]. Kolik různých rozesazení musíme vystřídat pro *obecná* s a t, než toto nastane? Pro jaká s a t to vůbec jde?

[2 body]

email: `martin@koutecky.name`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/`.