

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

Domácí úkol 3

Příklad 1. Mějme relaci na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ takovou že: $(a, b)R(c, d)$ právě tehdy když $\min(a, b) < \min(c, d)$. Rozhodněte, zda se jedná o ČUM a jestli existuje minimální/nejmensi/maximální/největší prvek. A také zda-li existuje pro každé dvouprvkové podmnožiny infimum či supremum. [1 bod]

Příklad 2. Které z těchto relací na množině \mathbb{N}^2 jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární?

(a) \leq_A : $(a, b) \leq_A (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$

(b) \leq_B : $(a, b) \leq_B (c, d)$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$

(c) \leq_C : $(a, b) \leq_C (c, d)$ právě když $a < c$ nebo $(a = c$ a zároveň $b \leq d)$

(d) \leq_D : $(a, b) \leq_D (c, d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$

[2 body]

Příklad 3.

[a]. Najděte dvě neizomorfní lineární uspořádání na \mathbb{N} . [1.5 bodu]

[a++]. Najděte nespočetně neizomorfních lineárních uspořádání na \mathbb{N} . [1 bodu]

Příklad 4. Dokažte, že Erdős-Szekeres lemma je těsné. Tedy nalezněte posloupnost délky $n^2 + 1$, která neobsahuje žádnou neklesající ani nerostoucí posloupnost délky $n + 2$. [1.5 body]

Příklad 5.

[a]. Dokažte vzorec $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ indukcí podle n (při pevném r). Hint: Pascalův trojúhelník ;) [2 body]

[a++]. Jaký má tento vzorec kombinatorický význam (tzn. co to říká, dívám-li se na kombinační čísla jako na něco o podmnožinách)? [1 bod]