

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

Cvičení 11.10.2013

Příklad. Které z následujících vztahů jsou správné?

$$(1) \lfloor \frac{(n+1)^2}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor + n$$

$$(2) \lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

Příklad. Najděte „správnou“ formuli pro počet číslic v desítkovém zápisu čísla n .

Příklad. Nalezněte potenční množinu množin $X = \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 20, i \equiv 1 \pmod{5}\}$ a $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Příklad. Jaká je velikost potenční množiny M v závislosti na velikosti M samotné?

Příklad. Zapište výraz $\bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m A_{ij}$ jako sjednocení průniků.

Příklad. Ukažte, že každá dvě uzávorkování výrazu $\bigcap_{i=1}^n X_i$ dávají stejný výsledek.

Příklad. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Příklad. Mějme množiny X velikosti n a Y velikosti m . Kolik existuje různých funkcí z X do Y ?

Příklad. Najděte funkci $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která

(a) je prostá a není na

(b) je na a není prostá

Příklad. Nalezněte relaci (je-li to možné), která

(a) je antisymetrická i symetrická zároveň

(b) je antisymetrická a není symetrická

(c) není antisymetrická, ale je symetrická

(d) není ani antisymetrická ani symetrická

Příklad. Nechť R je relace ekvivalence na množině X a $R[x]$ je množina všech prvků množiny X , které jsou s x v relaci. Dokažte:

(a) $x \in R[x]$

(b) $(x, y) \in R \Rightarrow R[x] = R[y]$

(c) $(x, y) \notin R \Rightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset$

Příklad. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Příklad. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:

(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff p \text{ dělí } (x - y)$

(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}, (x, y) \in R \iff x \text{ dělí } y \text{ a zároveň } y \text{ dělí } x$

(c) $X = \mathbb{N}, (x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}, \text{ že } z \text{ dělí } x \text{ i } y$

Příklad. Určete počet různých ekvivalencí na množině velikosti 5.