

DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)

Cvičení 04.10.2013

Příklad 1. V rybníčku kruhového tvaru plave kačenka. Ráda by odletěla pryč. Protože má poraněnou plovací blánu, nemůže z hladiny jezera vzlétnout a musí nejprve doplat na břeh. Tam na ni ale číhá kočka, která se bojí vody, ale po okraji rybníka se pohybuje čtyřikrát větší rychlostí než kačenka plave.

Existuje způsob, jak může kačenka kočce upláchnout, ať se kočka pohybuje jakkoliv chytře? Například pokud by se rozhodla hned plavat na druhý konec jezírka než stojí kočka, utéct by nedokázala.

[2 body]

Příklad 2. Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. (Mohu lámat pouze vodorovně či svisle.)

Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

[2 body]

Příklad 3. Dokažte, že každou sumu větší než 24 dokážeme zaplatit mincemi hodnoty 5 a 7.

[1 bod]

Příklad 3++. Zobecnění příkladu výše: dokažte, že pokud jsou a, b prvočísla, pak lze každou sumu větší nebo rovnou $(a-1)(b-1)$ zaplatit mincemi hodnoty a a b .

[3 body]

Příklad 4. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné 5.

[1 bod]

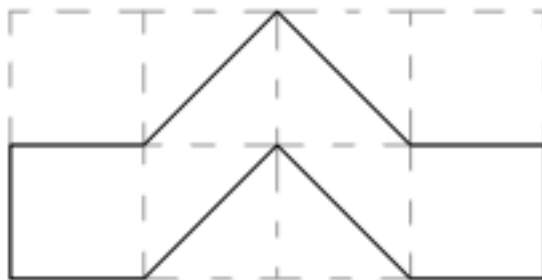
Příklad 5. Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

[1 bod]

Příklad 6. Na následující úloze si můžete otestovat svou schopnost nalezení jednoduchého leč skrytého řešení:

Rozdělte následující obrazec na 7 navzájem shodných částí. (Je nakreslený ve čtvercové mřížce.)



[1 bod]