DISKRÉTNÍ MATEMATIKA (NDMI002)
Cvičení 04.10.2013

Příklad 1. Stojíte na rozcestí, jedna cesta vede k pokladu, druhá k šibenici. Mimo to se tam vyskytují dva pocestní. Jeden vždy mluví pravdu, druhý vždy lže. Můžete si vybrat jednoho z nich a položit mu jednu otázku na ano/ne. Jak to udělat, abyste zjistili, která cesta je která?

Příklad 2. Topinka se opéká 2 minuty po každé straně. Kolejní topinkovač umí opékat 2 topinky současně. Ve skříňce jste našli poslední 3 krajíce topinky a chcete si z nich udělat topinky. Jak to udělat co nejrychleji?

Příklad 3. V tajuplném sklepení stojí 3 truhlice. V jedné jsou diamanty, v druhé zlato, ve třetí švábi. Jednou si nìkdo dal tu práci, aby každou truhlici označil cedulkou popisující, co je uvnitř. A podruhé si někdo jiný dal tu práci, aby cedulky proházel tak, že ani jedna nesouhlasí. Jak na co nejméně otevření truhlic zjistit, která je která?

Příklad 4. Bylo jedno mafiánské městečko a tam žila veliká spousta mafiánů. Mafiáni měli manželky a jak už to tak bývá, některé manželky byly věrné a jiné ne. Žádný z mafiánů však o své manželce neví, zda je mu věrná či ne. Na druhou stranu ví všechno ostatní, tedy i o ostatních mafiánech a věrnosti jejich manželek.

Jednoho dne byla oslava, kde se jeden svobodný mafián opil a přede všemi prohlásil:„V tomhle městě je alespoň jedna nevěrná manželka. Uběhlo 42 dní a všechny nevěrné manželky byly najednou v poledne oběšeny na náměstí. Kolik jich bylo a jak k tomu přesně došlo?

Mafián nemá jinou možnost jak zjistit, zda je jeho manželka nevěrná, než pomocí vlastního logického uvažování—nikdo mu to nemůže říct. Uvažování mafiánů funguje po dnech. Pokud kterýkoliv mafián zjistí, že jeho manželka je nevěrná, následujícího dne ji na náměstí veřejně popraví (tedy všichni mafiáni se o tom dozvědí). Na druhou stranu nikdy nepopraví manželku, pokud si není absolutně jistý, že je mu nevěrná. Všichni mafiáni uvažují naprosto identicky a vědí to o sobě.

Příklad 5. n dětí si společně hraje, po určité době se k dětí zablátí na čele. Vrátí se domů a otec jim řekne: „Nejméně jeden z vás má bláto na čele".

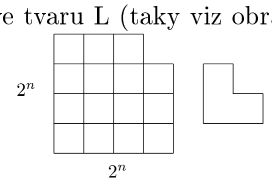
Dále se postupuje v krocích. Otec se opakovaně ptá: „Ví někdo z vás zda má bláto na čele?" Dokažte, že po k krocích všechny zablácené děti odpovědí ANO.

Příklad 6. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2$$

Příklad 7. Nakresleme n přímek v rovině tak, že žádné 2 nejsou rovnoběžné a žádné 3 se neprotínají v jednom bodě. Dokažte, že rovina je tím rozdělena na přesně $n(n+1)/2+1$ částí.

Příklad 7. Máme šachovnici $2^n \times 2^n$ ve které chybí jedno políčko, jako na obrázku. Dokažte, že ji můžeme vydláždit mnohoúhelníky ve tvaru L (taky viz obrázek).



email: martin@koutecky.name, url: http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/.

Příklad 8. Jsme v divné zemi, kde existují mince hodnoty 3 a 5. Dokažte, že každý obnos větší než 7 lze zaplatit pouze těmito mincemi.

Příklad 9. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^5 - n$ dělitelné 5 (beze zbytku).

Příklad 10. Tabulku čokolády $m \times n$ dílků chceme rozlámat na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?

Příklad 11. Opět lámání čokolády, tentokrát pro dva hráče. Hráči se pravidelně střídají v tazích. Ten, který je zrovna na tahu, si vybere jednu z částí čokolády a libovolně ji rozlomí, pouze je zakázáno odlamovat kousky 1×1. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Vymyslete vyhrávající strategii pro hráče, který začíná, víte-li, že alespoň jeden z rozměrů čokolády je na počátku sudý.