DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
7. (mega) série DÚ. Termín: 22. 12. 2015

Stromky. Zahradnická firma sází po městě stromky; víme, že průměrně 90% z nich přežije. Jaká je pravděpodobnost, že z následujících 13 zasazených stromů, jich:

[a]. Přežije nejvýše 10?

[b]. Přežije alespoň 10?

[c]. Přežije přesně 10?
[1.5 bodů]

Námořníci. Po dlouhé noci se m opilých námořníků vrací do n kajut (rovnoměrně náhodně).

[a]. Kolik bude průměrně námořníků v jedné kajutě?

[b]. Kolik bude průměrně prázdných kajut?
[1.5 bodů]

Jednotažka 1. Ukažte, že každý graf je možné nakreslit jedním tahem tak, že každou jeho hranou projdu dvakrát.
[1 bod]

Lichý cyklus. Ukažte, že když graf G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak taky obsahuje lichý cyklus jako indukovaný podgraf.
[1 bod]

Stupně 4 **nebo** 5**.** Graf G má 14 vrcholů a 30 hran a každý vrchol je stupně 4 nebo 5. Kolik má vrcholů stupně 5?
[1 bod]

Nejdelší cesty. Dokažte, že každé dvě nejdelší cesty v souvislém grafu mají společný vrchol.
[2 body]

Párty. Pan a paní Novákovi byli na exkluzivní party, kde kromě nich byly jen 3 další páry. Někteří lidé se navzájem pozdravili potřesením rukou, samozřejmě nezdravili svého partnera, a nikdo s nikým se nezdravil dvakrát. Později se pan Novák každého (včetně své ženy) zeptal, s kolika lidmi si potřásli rukou. K překvapení všech dostal od každého jinou odpověď. S kolika lidmi si potřásla rukou paní Nováková?
Umíte to zobecnit na $n \geq 2$ párů na party?
[$2 + 1$ body]

Kolik hran? Nechť G je graf na n vrcholech a má k komponent (skládá se z k souvislých podgrafů, mezi kterými nevede žádná hrana). Kolik nejmíň a kolik nejvíc hran může tento graf mít? Svoje tvrzení zdůvodněte.
[2 body]

Listy stromu. Nechť strom G obsahuje vrchol stupně k. Dokažte, že obsahuje alespoň k listů.
[1 bod]

email: koutecky@kam.mff.cuni.cz, url: http://research.koutecky.name/teaching/.

Nezávislá ve stromu. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. (Nezávislá množina je množina vrcholů, mezi nimiž nejsou žádné hrany.)
[1 body]

Definice 1 (Matice sousednosti)**.** Matice sousednosti M grafu $G = (V, E)$ je $\{0, 1\}$ matice velikosti $|V| \times |V|$, která má na pozici a_{ij} jedničku právě tehdy když je v grafu hrana z vrcholu i do vrcholu j.

Definice 2 (Matice sousednosti)**.** Nechť A je matice $n \times n$. Pak $A^n = A \cdot A \cdots A$ (n-krát), kde $\cdot$ je standardní maticový součin.

Nuly v matici 1.

malý. Najděte souvislý graf na třech vrcholech takový, že každá mocnina jeho matice sousednosti obsahuje nuly.

obecně. Najděte takový graf pro každé n.
[$0.5 + 1$ bod]

Nuly v matici 2. Buď G graf na n vrcholech, $A = A_G$ jeho matice sousednosti, a I_n jednotková matice typu $n \times n$. Dokažte, že G je souvislý právě když $(I_n + A)^{n-1}$ nemá žádné nulové členy.
[1.5 body]

Stupeň alespoň d. Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d, obsahuje cestu na $d + 1$ vrcholech jako podgraf.
[1.5 body]

Souvislost a trhání vrcholů. Dokažte, že každý souvislý graf G na alespoň třech vrcholech obsahuje dva vrcholy u a v takové, že všechny tři grafy $G \setminus \{u\}$, $G \setminus \{v\}$ a $G \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé.
[1.5 body]

Doplněk nesouvislého. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?
[1.5 bod]