DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
8. série DÚ. Termín: kdykoliv

Definice 1 (Vnějškově rovinný graf)**.** Graf je *vnějškově rovinný*, když má rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně.

Barevnost vnějškově rovinných. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je zabarvitelný třemi barvami.
[2.5 bodu]

Barevnost duálu a sudé stupně. Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.
[1 bod]

Definice 2 (d-degenerovaný graf, degenerovanost grafu)**.** Graf G je *d-degenerovaný*, pokud každý jeho podgraf obsahuje vrchol stupně $\leq d$. *Degenerovanost* grafu G je nejmenší d takové, že G je d-degenerovaný.

Co je degenerované? Určete degenerovanost těchto tříd grafů:

(1) Stromy
(2) Mřížky (*Mřížka* $n \times m$ *je graf na vrcholech* $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ *s hranami* $\{(i, j), (k, l)\}$ *pro* $|i - k| = 1 \wedge |j - l| = 1$.)
(3) Všechny bipartitní grafy na n vrcholech
(4) Bonus: pro jakoukoliv jinou třídu dle vaší volby určete co nejlépe její degenerovanost.

[4×1 bodů]

Barevnost a degenerovanost. Dokažte, že d-degenerované grafy jsou $d+1$-obarvitelné.
[1 bod]

Definice 3 (Hranol)**.** *Hranol* grafu G získáme tak, že vezmeme jeho dvě disjunktní kopie $G = (V, E), G' = (V', E')$ a hranou spojíme odpovídající vrcholy (tedy přidáme hrany $\{v_1, v_1'\}, \ldots, \{v_n, v_n'\}$). Pro představu: hranol C_4 (čili čtverce) jsou hrany trojrozměrné krychle (nakreslete si to).

Úlohy o hranolech.

[a]. Pokud G měl uzavřený eulerovský tah, bude ho mít i Hranol(G)? Co musí platit, aby Hranol(G) měl uzavřený eulerovský tah?
[1 bod]

[b]. Pokud byl G bipartitní, bude Hranol(G) taky bipartitní?
[1 bod]

[c]. V jakém vztahu je $\chi(G)$ a $\chi(\text{Hranol}(G))$ pokud $\chi(G) > 1$?
[1.5 bodu]

[d]. Je graf Hranol(Hranol(C_4)) rovinný? Pokud ano, nakreslete jej, pokud ne, dokažte, proč ne. (*Hint: všimněte si, že tento graf je bipartitní.*)
[1.5 bodu]

email: `koutecky@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://research.koutecky.name/teaching/`.