DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
3. série DÚ. Termín: 27. 10. 2015

Dlouhý a ne-příliš zajímavý. Které z těchto relací na množině $\mathbb{N}^2$ jsou uspořádání? Která z těchto uspořádání jsou lineární? Určete jejich nejmenší/největší/minimální/maximální prvky a nakreslete Hasseův diagram:

(1) $\leq_A$: $(a,b) \leq_A (c,d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$
(2) $\leq_B$: $(a,b) \leq_B (c,d)$ právě když $a \leq c$ nebo $b \leq d$
(3) $\leq_C$: $(a,b) \leq_C (c,d)$ právě když $a < c$ nebo ($a = c$ a zároveň $b \leq d$)
(4) $\leq_D$: $(a,b) \leq_D (c,d)$ právě když $a \leq c$ a zároveň $b \geq d$

(Hasseův diagram do úkolu kreslit nemusíte, ale může vám pomoci si rozmyslet řešení úlohy. Připomínám, že úkolem není pouze najít odpovědi, ale především je dokázat.)

[4×0.75 bodů]

Definice 1 (Isomorfismus uspořádaných množin)**.** Nechť $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Říkáme o nich, že jsou isomorfní, pokud existuje nějaké vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon X \to Y$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí $x \leq y$ právě když $f(x) \preceq f(y)$.

Lineární uspořádání na konečné množině. Dokažte, že existuje pouze jedno lineární uspořádání na konečné množině, až na isomorfismus. („Až na isomorfismus" znamená, že sice mohou existovat různá lineární uspořádání, jsou ale všechna vzájemně isomorfní.)

(Nápověda: vyberte si nějaké „hezké" lineární uspořádání na této množině a dokažte, že s ním jsou všechna ostatní lineární uspořádání isomorfní.)

[1 bod]

Bonus. Poznámka: slovo *bonus* znamená *dobrý* ;)

Jaká věc, kterou lze koupit za 20Kč či méně, Ti udělá největší radost?

Nebojte, každá odpověď je správná :)

[1 bod]

Následující úlohy jsou velmi zajímavé, ale trochu těžší, takže je dávám „navíc" – již předchozí úlohy jsou za 5 bodů.

Definice 2 (Vnoření uspořádání)**.** Nechť $(X, \leq)$ a $(Y, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Zobrazení $f\colon X \to Y$ nazýváme vnoření $(X, \leq)$ do $(Y, \preceq)$, jestliže platí:
(i) f je prosté
(ii) $f(x) \preceq f(y)$ pro každé $x \leq y$
(iii) jestliže $f(x) \preceq f(y)$, potom i $x \leq y$

Lexikografické uspořádání $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vnořeno do $\mathbb{Q}$.

(1) Popište nějaké vnoření množiny $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do uspořádané množiny $(\mathbb{Q}, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání podle velikosti.
(2) Popište vnoření $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s lexikografickým uspořádáním do $(\mathbb{Q}, \leq)$.

[2 body]

Neizomorfní lineární uspořádání.

(1) Najděte dvě neizomorfní lineární uspořádaní na $\mathbb{N}$.
(2) Najděte nespočetně neizomorfních lineárních uspořádání na $\mathbb{N}$.

[$0.5 + 2$ body]

email: `koutecky@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://research.koutecky.name/teaching/`.