DISKRÉTNÍ MATEMATIKA
Cvičení 13. 10. 2015

Potenční množiny. Nalezněte potenční množinu množiny $Y = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Mohutnosti. Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí $2^X = 2^Y$, právě když $X = Y$?

Potenční množiny zase ... Jaká je velikost potenční množiny M v závislosti na velikosti M samotné?

Zobrazení složená sama na sebe. Mějme zobrazení $f : X \to X$ na nějaké (konečné) množině X splňující $f \circ f = f$. Příkladem takovéhoto tvrzení budiž indentita na X. Nalezněte další zobrazení splňující tento vztah. Charakterizujte všechna takováto zobrazení.

Počet funkcí. Mějme množiny X velikosti n a Y velikosti m. Kolik existuje různých funkcí z X do Y?

Funkce prosté a na. Najděte funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která
(a) je prostá a není na
(b) je na a není prostá

Skládání funkcí. Funkce $f(g(x))$ je prostá. Musí být funkce f a/nebo g také prosté?

Počet reflexivních relací. Kolik je různých reflexivních relací na množině n prvků?

Uzavřenost relačních operací. R a S jsou relace na konečné množině X. Do tabulky níže doplňte, zda má $R{*}S$ (pro $* \in \{\cup, \cap, \Delta, \setminus, \circ, ^{-1}\}$) vlastnost $V \in$ {reflexivní, symetrická, anti-symetrická, tranzitivní}. Pozor, ptáme se na to, zda má tuto vlastnost *jistě*, ne zda existují nějaké “správné” R, S, pro které i $R * S$ má tuto vlastnost.

vlastnost R, S	$R \cup S$	$R \cap S$	$R \triangle S$	$R \setminus S$	$R \circ S$	R^{-1}
reflexivní						
symetrické						
anti-symetrické						
tranzitivní						

Ekvivalence I. Nechť R je relace ekvivalence na množine X a $R[x]$ je množina všech prvků množiny X, které jsou s x v relaci. Dokažte:
(a) $x \in R[x]$
(b) $(x, y) \in R \Rightarrow R[x] = R[y]$
(c) $(x, y) \notin R \Rightarrow R[x] \cap R[y] = \emptyset$

Ekvivalence II. Nechť relace R a R' mají stejné třídy ekvivalence. Dokažte, že $R = R'$.

Ekvivalence III. Rozhodněte, zda následující relace jsou ekvivalence:
(a) $X = \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff p$ dělí $(x - y)$
(b) $X = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $(x, y) \in R \iff x$ dělí y a zároveň y dělí x
(c) $X = \mathbb{N}$, $(x, y) \in R \iff \exists z \in \mathbb{N}$, že z dělí x i y
(d) $X = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $((a, b), (c, d)) \in R \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

email: koutecky@kam.mff.cuni.cz, url: http://research.koutecky.name/teaching/.