ALGORITMY A DATOVÉ STRUKTURY 1 (NTIN060)
Cvičení 8. 4. 2015

Barvení 6. Máme rovinný graf a chceme jeho vrcholy obarvit 6 barvami. Algoritmus by měl mít lineární časovou složitost. (Za bonus barvení 5 barvami. Algoritmus už nemusí být lineární, ale čím rychlejší, tím lépe.)

Unikátní. Jak poznat grafy, které lze topologicky uspořádat právě jedním způsobem?

Váhy 1...K. Jak rychle lze hledat minimální kostry v grafu, ve kterém jsou všechny váhy přirozená čísla 1...K?

Druhá nejlepší. Jak najít druhou nejlepší kostru?

Kostry v multigrafech. Rozmyslete, jak upravit nějaký algoritmus na hledání minimální kostry tak, aby fungoval na multigrafu (grafu se smyčkami a násobnými hranami).

Kostry v rovinných grafech. Jak najít minimální kostru v rovinném grafu v čase $\mathcal{O}(n)$?

Změna jedné. Mějme graf G a jeho minimální kostru T. Jak se změní minimální kostra oproti T, když se změní váha jedné hrany?

Housenka. Najděte v zadaném stromě housenku na co nejvíce vrcholech. Housenka je podgraf, který se skládá z cesty na jejímž každém vrcholu jsou až čtyři listy (nožičky), ale můžou tam být i vrcholy bez nožiček. Není to totéž, co nejdelší cesta, protože nejde o housenku co nejdelší, ale na největším počtu vrcholů (tedy i s nožičkami). Řešení by mělo být v $\mathcal{O}(n)$.

Zakázka. Olga Opatrná najala Láďu Lenocha, aby ji pro daný neorientovaný graf $G = (V, E)$, vrchol $s \in V$ a *nezáporné* celočíselné váhy hran $w(u, v)$ (kde $w(u, v) = w(v, u)$) spočítal nejkratší cesty z vrcholu s do všech ostatních vrcholů. Konkrétně má Láďa spočíst dvě funkce: $d(v)$ má být délka nejkratší cesty z s do v (nebo ∞, pokud taková není), a $\pi(v)$ má být předposlední vrchol na nějaké nejkratší cestě z s do v (nebo NIL, pokud taková není).

Olga ale moc nevěří Láďově pečlivosti, a tak si chce výsledky ověřit, což se jí zdá jednodušší, než si je spočíst sama. Konkrétně ověří následující podmínky:

- $d(s) = 0$
- $\pi(s) = \text{NIL}$
- $\forall (u, v) \in E : d(v) \leq d(u) + w(u, v)$
- $\forall v \in V : \pi(v) \neq \text{NIL} \Rightarrow d(v) = d(\pi(v)) + w(\pi(v), v)$
- $\forall v \in V, v \neq s : d(v) < \infty \Rightarrow \pi(v) \neq \text{NIL}$

Jak může Láďa Olze dát data d a π, která nejsou korektní podle Olžina zadání, ale splňují tyto ověřovací podmínky? Konkrétně: najděte takový graf, funkci w, vrchol s a funkce d a π, nebo ještě lépe popište takové případy obecněji. Za druhé upravte či doplňte podmínky tak, aby už každé řešení splňující tytpo podmínky popisovalo nejkratší vzdálenosti a cesty.

Deadline. Máte zadaných N úkolů, kde každý má daný deadline a počet bodů za jeho řešení. Vy jakýkoliv z těchto úkolů umíte vyřešit za právě jeden den. Cílem je naplánovat plnění úkolů tak, abyste v součtu získali co nejvíce bodů. (Body obdržíte pouze pokud pro úkol splníte jeho deadline.)

Mějme algoritmus, který úkoly setřídí podle počtu bodů a pak postupně plní nejhodnotnější úkoly, které ještě neměly deadline. Rozhodněte, zda takový algoritmus funguje a buď dokažte jeho správnost, nebo jej vyvraťte a dodejte funkční řešení.

email: `koutecky@kam.mff.cuni.cz`, url: `http://kam.mff.cuni.cz/~alquaknaa/`.

Matice. Máme zadanou matici A celých čísel o velikosti $N \times N$. Navrhněte algoritmus, který rozhodne, zda existuje neorientovaný ohodnocený strom T, ve kterém vzdálenosti pro každou dvojicí vrcholů i, j odpovídá číslu $A[i, j]$ v matici. Hrany stromu jsou ohodnoceny přirozenými čísly.