11. cvičení

Rovinný eulerovský. Dokažte, že rovinný eulerovský graf lze do roviny nakreslit jednou uzavřenou nekřížící se křivkou (tzn. křivka se sama sebe ve vrcholech jen dotýká, ale nekříží se).

Platónská tělesa. Nakreslete grafy všech pěti pravidelných mnohostěnů. Nahlédněte, že jsou rovinné. Jak vypadají jejich duály?
Asi jste si všimli, že graf platónského tělesa je souvislý, rovinný a k-regulární s takovým rovinným nakreslením, že všechny stěny mají délku ℓ (pro nějaké $k, \ell \in \mathbb{N}$). Označme $n = |V(G)|$. Postupně dokažte:

- Platí $n(2k + 2\ell + k\ell) = 4\ell$.
- Jediné možnosti pro (k, ℓ) jsou $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.

Nejvíc stěn. Jaký je maximálně počet vnitřních stěn rovinného grafu na n vrcholech?

Beztrojúhelníkový je 4-obarvitelný. Dokažte, že rovinný graf bez trojúhelníků lze vždy obarvit 4 barvami.

Vnějškově rovinný je 4-obarvitelný. Řekneme, že rovinný graf G je *vnějškově rovinný*, pokud má takové nakreslení, kde všechny jeho vrcholy leží na vnější stěně.
Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf má obarvení 4 barvami.

Kubický rovinný určený stěnami. Graf je *kubický* když je 3-regulární, tzn. když stupeň každého vrcholu je přesně 3. Rozhodněte, zda existuje kubický rovinný graf s

(1) právě 12 šestiúhelníkovými stěnami (a žádnými dalšími)?
(2) právě 12 pětiúhelníkovými stěnami (a žádnými dalšími)?
(3) jednou dvacetiúhelníkovou stěnou a deseti pětiúhelníkovými (a žádnými dalšími)?

Nash-Williamsova věta. Ukažte, že hrany každého rovinného grafu lze zorientovat tak, že každý vrchol má výstupní stupeň nejvýše 3.