5. cvičení

Kvíz

(1) Mějme relaci R na množině X, která je symetrická a tranzitivní a každý prvek $x \in X$ je v relaci s aspoň jedním prvkem. (Poslední vlastnost se dá formálně zapsat jako $|\{(a,b) \in R \mid a = x \wedge b = x\}| \geq 1$.) Pak R je také reflexivní.
  (a) ano
  (b) ne

(2) Mějme ekvivalenci $x \sim y \Leftrightarrow x - y \mod 3 = 0$ na přirozených číslech $\mathbb{N}$. Co je $[23]_\sim$, tzn. třída ekvivalence prvku 23?

Kombinatorika

Konference. Na konferenci potkal matematik 5 svých dobrých známých. Jelikož program byl bohatý, setkávali se pouze u obědů. Kolik dní trvala konference, pokud:

- s každým jednotlivcem obědval 10 krát
- s každou dvojicí 5 krát
- s každou trojicí 3 krát
- s každou čtveřicí 2 krát
- s celou pěticí právě jednou
- vždy obědval alespoň s jedním z těchto pěti kamarádů.

(Pozor: pokud obědval se dvěma známými, započítá se to i do obědů s nimi jako s jednotlivci.)

Prvočíselně vypadající. Řekneme, že číslo je *prvočíselně vypadající*, pokud je složené, ale není dělitelné 2, 3 ani 5. Tři nejmenší prvočíselně vypadající čísla jsou 49, 77 a 91. Víme, že prvočísel menších než 1000 je 168. Kolik je prvočíselně vypadajících čísel menších než 1000? (Vyřešte bez počítače.)

Obdélníky v síti. Kolik je ve čtvercové mřížce $n \times n$ obdélníků, jejichž rohy jsou body mřížky?

Podmnožiny bez sousedů. Kolik je podmnožin $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících dvě po sobě jdoucí čísla?

Kameny na šachovnici. Kolika způsoby lze umístit osm kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby se na šachovnici vyskytovaly čtyři kameny ve stejném řádku nebo stejném sloupci?

Dělitelnost faktoriálu.

(1) Ukažte, že $k!$ dělí součin každých k po sobě jdoucích (přirozených) čísel. *Hint: zamyslete se nad správně zvoleným kombinačním číslem…*

(2) Ukažte s pomocí předchozího tvrzení, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.